

Esame Geometria 3: 13 giugno 2023
Prof. P.A. Oliverio - Dr. F.G. Infusino

Esercizio 1. Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$

- (1) Determinare la curvatura e la torsione di γ in ogni suo punto. **(4 pt.)**
- (2) Determinare il triedro di Frenet-Serret nel punto corrispondente a $t = 1$. **(2 pt.)**

Esercizio 2. Si consideri la parametrizzazione $r : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \ln(u))$$

- (1) Stabilire la natura dei punti di S . **(4 pt.)**
- (2) Determinare un'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie nel punto $P = r(1, \pi)$. **(2 pt.)**

Esercizio 3. (1) Determinare la trasformazione lineare fratta f che manda -2 in ∞ , $1 + i$ in $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$ e 0 in $\frac{1}{2}$. **(3 pt.);**

- (2) Determinare l'immagine tramite f di $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = 1\}$. **(3 pt.);**

Esercizio 4. Calcolare il valore dei due seguenti integrali:

$$\oint_{\gamma(-2;7)} \frac{\sin(z) + \cos(z)}{(z-3)^3} dz, \quad \text{e} \quad \oint_{\gamma(-1;6)} z^2 \cos\left(\frac{1}{z-i}\right) dz \quad \text{(3pt.)}$$

Determinare inoltre la serie di Laurent centrata in $z = -4i$ della funzione

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 2iz + 8} \quad \text{(2pt.);}$$

Infine, trovare il numero di zeri contati con molteplicità della funzione seguente nel dominio indicato:

$$e^{2z} + 8z^2 \quad |z| < 1 \quad \text{(1pt.)}$$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti esercizi:

- (1) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ la funzione

$$f(z) = (a^4 - 1)z \cos(-2z) + (a^6 - 40)z\bar{z}e^z - 24|z|^2 e^z$$

risulta essere intera. **(3 pt.)**

- (2) Determinare poli e zeri in \mathbb{C} , con rispettive molteplicità, ed eventuali singolarità eliminabili della funzione:

$$f(z) := \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z^8(z^2 - 1)^3} \quad \text{(3pt.);}$$